Matematičko modeliranje romantičnih odnosa

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

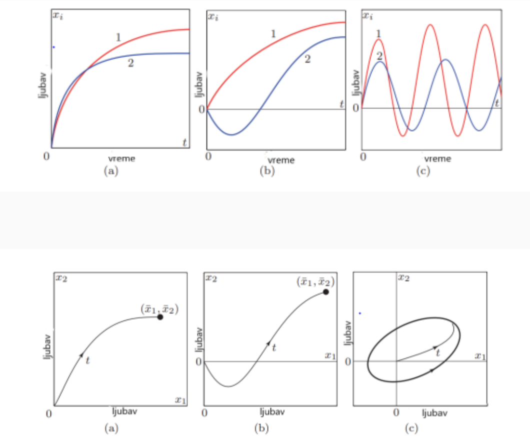
Student: Spomenka Milić
Mentor: prof. dr Milan Dražić

September 7, 2023

Sadržaj

Matematički pogled

Matematički pogled



Slika 1: Grafički prikaz ljubavne priče

Matematički pogled

- ODJ Model
$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),\\ &\vdots\\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),\end{aligned}$$
  pri čemu $x_i(t)$ predstavljaju zavisne promenljive, $\frac{dx_i(t)}{dt}$, $i = 1, 2, ..., n$ njihove izvode, t je nezavisna promenljiva (vreme), dok funkcije f_i opisuju odnos između nezavisne promenljive t, zavisnih promenljivih $x_1, x_2, ..., x_n$ i njihovih izvoda.
- Ovi modeli se sastoje od konačnog broja običnih diferencijalnih jednačina koje opisuju odnos između promenljivih sistema, kao i njihove promene kroz vreme.
- Vuku korene iz 17. veka.

Matematički pogled

- U slučaju opisivanja dinamike ljubavnih odnosa je:

$$f_i = R_i^A + R_i^L - O_i,$$

pri čemu funkcije R_i^A, R_i^L i O_i opisuju kako osoba i reaguje kada voli, kada je voljena i njen proces ”hlađenja”.

- U opštem slučaju važi

$$R_i^A = \gamma_i A_j = \gamma_i \sum_h \lambda_{j/i}^h A_{j/i}^h,$$

pri čemu je A_j privlačnost osobe j uočena od partnera i, $A_{j/i}^h$ predstavljaju komponente privlačnosti, a $\lambda_{j/i}$ težine tih komponenti, dok γ_i karakteriše reakciju osobe i na zaljubljenost.

Matematički pogled

- Sigurne osobe $\rightarrow \frac{dR_i^L(x_j)}{dx_j} > 0.$
- Nesigurne osobe $\rightarrow \frac{dR_i^L(x_j)}{dx_j} < 0.$
- Subjektivnost/platonska ljubav = pristrasnost.
- U slučaju pristrasnih osoba, R_i^A i R_i^L, mogu imati sledeći oblik:

$$R_i^A(x_i) = (1 + b_i^A B_i^A(x_i))\gamma_i A_j,$$

$$R_i^L(x_i, x_j) = (1 + b_i^L B_i^L(x_i))R_i^L(0, x_j),$$

  gde su b_i^A i b_i^L koeficijenti pristrasnosti, a B_i^A i B_i^L funkcije pristrasnosti, dok $R_i^L(0, x_j)$ predstavlja reakciju na ljubav potpuno ravnodušne osobe.
- Homogeni parovi.

Linearni model

Linearni model

- Standardni parovi - sastavljeni samo od sigurnih i nepristrasnih osoba.
- U ovom slučaju važi:

$$O_i(x_i) = \alpha_i x_i,$$

$$R_i^L(x_i, x_j) = \beta_i x_j,$$

$$R_i^A(A_j, x_i) = \gamma_i A_j,$$

gde parametri $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, A_i)$ karakterišu osobu i i svi su pozitivni.
- Model sada ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 A_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 A_1,$$

pri čemu je α_i koeficijent zaborava, dok β_i i γ_i karakterišu kako osoba reaguje na ljubav koju dobija i pruža.

Linearni model

- Prvi pokušaj izučavanja ovakvog modela (za $A_i = 0$) vuče korene još iz 1975. godine (Ilya Prigogine i Etienne Guyon) i vezan je za termodinamiku.
- Steven Strogatz, 1978. - Diferencijalne jednačine i progres romantične veze.
- Strogacov model

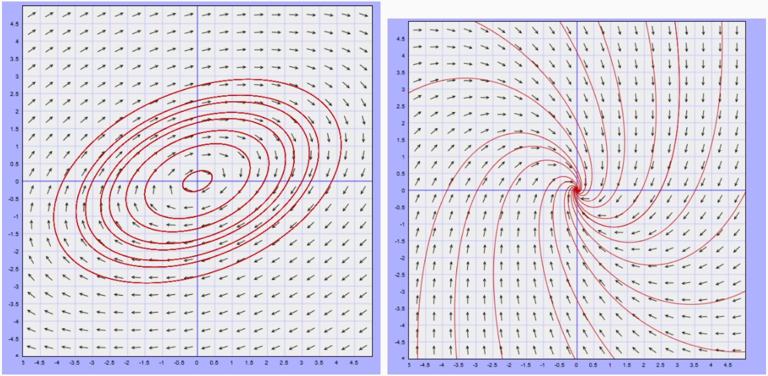
$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ,$$
$$\frac{dJ}{dt} = cR + dJ,$$

  gde parametri a i b karakterišu Romea i njegove osobine u ljubavnom odnosu, dok se parametri c i d odnose na Juliju i njen emocionalni stil.

Linearni model

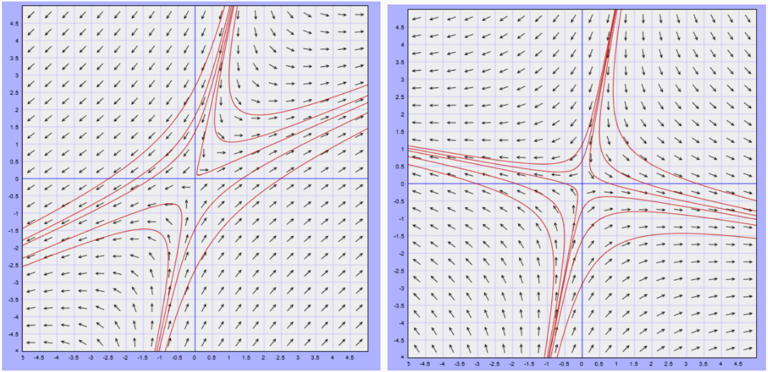
- Na osnovu parametara a i b koji karakterišu Romeov emocionalni stil, postoje 4 slučaja:
  - $a \geq 0, b \geq 0$ - **emotivni ljubavnik**.
  - $a \geq 0, b < 0$ - **narcisoidni ljubavnik**.
  - $a < 0, b \geq 0$ - **oprezni ljubavnik**.
  - $a < 0, b < 0$ - **samotnjak**.

Linearni model



Slika 2: Na levoj slici je predstavljena dinamika veze dva oprezna ljubavnika, a na desnoj dinamika veze opreznog ljubavnika i samotnjaka

Linearni model



Slika 3: Na levoj slici je predstavljena dinamika veze dva narcisoidna ljubavnika, a na desnoj dinamika veze narcisoidnog ljubavnika i samotnjaka

Ljubavni ciklusi

Ljubavni ciklusi

- Nema pristrasnosti $\implies$ nema ciklusa

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_2) + \gamma_1 A_2,$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1) + \gamma_2 A_1.$$

Bendiksonov kriterijum

Ukoliko imamo dinamički sistem definisan jednačinama

$$x' = P(x, y) \quad \text{i} \quad y' = Q(x, y)$$

i ukoliko je izraz

$$I(x, y) = P'_x + Q'_y$$

u prosto povezanoj oblasti G konstantno pozitivan (ili bar nenegativan, ali ne konstantno jednak nuli) ili konstantno negativan (ili bar nepozitivan, ali takav da nije konstantno jednak nuli), onda dinamički sistem neće imati zatvorenih trajektorija u oblasti G.

- Nema nesigurnosti $\implies$ nema ciklusa
- Posmatramo opšti model:

$$x_1 = f_1(x_1, x_2) = -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_1, x_2) + R_1^A(x_1, A_2),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1, x_2) + R_2^A(x_2, A_1).$$

- U odnosu između dve osobe koje se karakterišu kao platoničari, znak divergencije je konstantno negativan $\rightarrow$ nisu mogući neprestani usponi i padovi osećanja.
- Za ostale tipove osoba ništa ne može biti rečeno.

Ljubavni ciklusi

- Pokazano je da ciklično ponašanje sistema ne može proizaći iz Hopfovih bifurkacija (nisu uzete u obzir i druge vrste bifurkacija, kao ni drugi faktori koji mogu dovesti do cikličnog ponašanja sistema).

Bifurkacija

Bifurkacija je ključni trenutak u dinamičkim sistemima kada menjanjem parametara ili uslova sistema dolazi do značajne promene u njegovom ponašanju. To je tačka preokreta koja vodi ka novim stabilnim stanjima, periodičnim oscilacijama ili haosu, otvarajući vrata ka novim oblicima i dinamici sistema.
Hopfova ili periodička bifurkacija je poseban tip bifurkacije koji se javlja kada sistem pređe iz stabilnog stanja u periodičko oscilatorno kretanje.

Ljubavni ciklusi

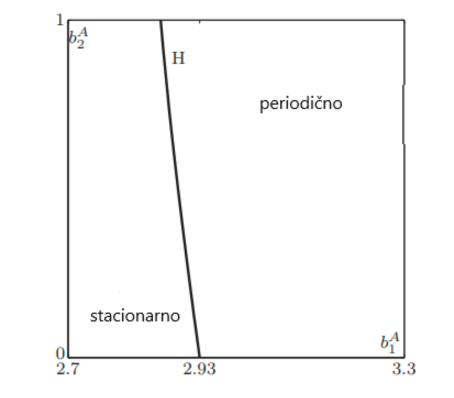
- Primer u kome je razmatran odnos između dve nesigurne i pristrasne osobe koje su subjektivne u reakciji na privlačnost:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_2) + (1 + b_1^A B_1^A(x_1))\gamma_1 A_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1) + (1 + b_2^A B_2^A(x_2))\gamma_2 A_1,$$

  pri čemu su funkcije R_1^L i R_2^L prvo rastuće, pa onda opadajuće, a koeficijenti pristrasnosti b_1^A i b_2^A pozitivni.
- Fiksiraju se svi parametri osim parametara b_1^A i b_2^A.
- Vrše se simulacije, takve da se u svakom koraku postepeno povećava jedan od dva koeficijenta pristrasnosti (krenuvši od $b_1^A = b_2^A = 0$ jer je za njih dokazano da ne dolazi do periodičnog ponašanje sistema).

- Na kraju se dolazi do sledeće **Hopfove bifurkacijske krive**:



Slika 4: Kriva koja razdvaja periodična od stacionarnih stanja

Stresori iz spoljnog sveta

Stresori iz spoljnog sveta

- Model sada ima sledeći oblik:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)),$$

  pri čemu $w(t)$ predstavlja ukupan spoljašnji stres.
- Stresovi $w(t)$, bilo da su predstavljeni kao impulsi, step funkcije, sinusoide ili beli i obojeni šumovi, često se nazivaju **kanonskim stresovima**.
- Model ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 A_2 + c_1 w,$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 A_1 + c_2 w,$$

  ili sažetije zapisan kao

$$\dot{x} = Ax + b + cw,$$

  gde su:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \gamma_1 A_2 \\ \gamma_2 A_1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

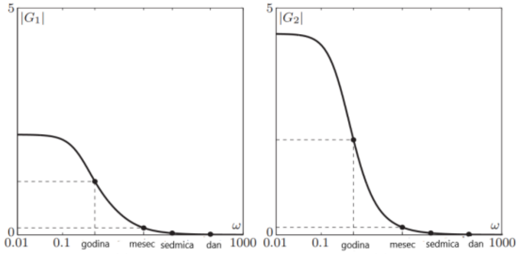
Stresori iz spoljnog sveta

- Odgovarajuća osećanja dobijena rešavanjem sistema jednačina se nazivaju **kanonskim odgovorom na stres**.
- Za slučaj da je $w(t) = Wsin(\omega t)$, dokazuje se da emocije oba pojedinca teže sinusoidnoj funkciji iste frekvencije stresa ω sledećeg oblika:

$$x_1 = X_1(\omega)sin(\omega t + \phi_1(\omega)), \quad x_2 = X_2(\omega)sin(\omega t + \phi_2(\omega)) \ ,$$

  pri čemu je $X_i(\omega)$ amplituda, dok se faza $\phi_i(\omega)$ naziva frekvencijski odziv.
- Par deluje kao niskopropusni filter.

- Primer



(a) (b)

- G_1 i G_2 predstavljaju **funkcije transfera (prenosa)**.

Dodatne emocionalne dimenzije

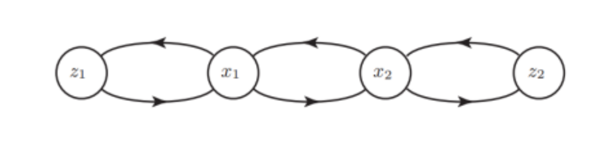
Dodatne emocionalne dimenzije

- Svaka osoba može imati nekoliko dodatnih dimenzija označenih varijablama $z_i^{(1)}, z_i^{(2)}, z_i^{(3)}$..., pri čemu $i = 1$ označava prvog, a $i = 2$ drugog partnera, dok (j) predstavlja j-tu dodatnu dimenziju.
- Za slučaj da svaka osoba ima samo jednu dodatnu emocionalnu dimenziju, njih će karakterisati ne samo ljubav prema partneru, nego i dodatna dimenzija, tj. par (x_i, z_i).
- Model u kom dodatna emocionalna dimenzija utiče na ljubavni faktor i na nju utiče ljubavni faktor samo iste osobe ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, z_i), \quad i = 1, 2,$$

$$\dot{z}_i = g_i(x_i, z_i), \quad i = 1, 2.$$

Dodatne emocionalne dimenzije



Slika 5: Graf uticaja

Dodatne emocionalne dimenzije

- Primer - veza između dve nesigurne i subjektivne umetničke duše koje postaju manje zaintresovane za partnera u naletima inspiracije, toliko da čak postanu platoničari. Takođe, njihova inspiracija težiće ka nuli ako nema ljubavi:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + (R_1^L(x_2) + (1 + b_1^A B_1^A(x_1))\gamma_1 A_2)\frac{1}{1+\delta_1 z_1},$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + (R_2^L(x_1) + (1 + b_2^A B_2^A(x_2))\gamma_2 A_1)\frac{1}{1+\delta_2 z_2},$$

$$\dot{z}_1 = \epsilon_1(\mu_1 x_1 - z_1),$$

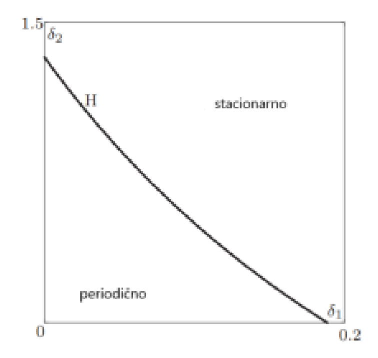
$$\dot{z}_2 = \epsilon_2(\mu_2 x_2 - z_2),$$

  pri čemu su $R_i^L(x_j)$ prvo rastuće, a potom opadajuće funkcije, a koeficijenti pristrasnosti b_i^A pozitivni jer su naši umetnici nesigurni i subjektivni u svojoj ljubavi. Parametar δ_i pokazuje u kojoj meri inspiracija z_i oslabljuje ljubavne faktore osobe i, dok parametri ϵ_i i μ_i karakterišu dinamiku inspiracije.

Dodatne emocionalne dimenzije

- Za $\delta_1 = \delta_2 = 0$ je već pokazano da će zaljubljeni par imati uspone i padove.
- Svi parametri osim parametara δ_1 i δ_2 se fiksiraju.
- Krenuvši od bilo koje početne tačke $(x_1(0), x_2(0), z_1(0), z_2(0))$ ciklusa za kog važi $\delta_1 = \delta_2 = 0$, može se izvesti simulacija za model u slučaju $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, pri čemu δ uzima male vrednosti.
- Rezultat je niz zatvorenih trajektorija.
- Za $\delta_1 = \delta_2 = 0.157$ u sistemu se javlja Hopfova bifurkacija.
- Nakon što je to ustanovljeno, može se koristiti algoritam kontinuacije da se dobije Hopfova bifurkacijska kriva u prostoru (δ_1, δ_2).

Dodatne emocionalne dimenzije



Slika 6: Hopfova bifurkacijska kriva

- Primećuje se da u ovom slučaju inspiracija ima stabilišući faktor na vezu.
- Brze i spore varijable.

Uža porodica

Uža porodica

- Model ima sledeći oblik:

$$\frac{dB}{dt} = aB + b(F - M)(c - (F - M)) + \gamma_1,$$

$$\frac{dF}{dt} = eF + gB(h - B) + jM + \gamma_2,$$

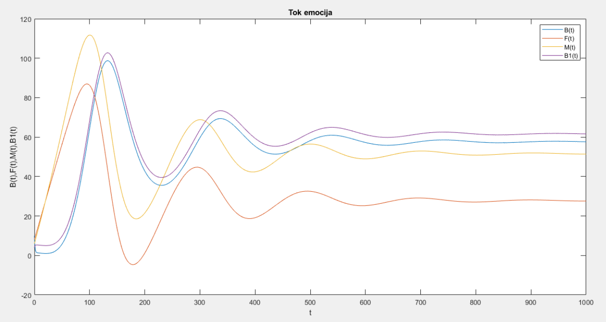
$$\frac{dM}{dt} = kM + mB_1(n - B_1) + pF + \gamma_3,$$

$$\frac{dB_1}{dt} = aB_1 + b(M - F)(d - (M - F)) + \gamma_4,$$

  pri čemu parametri a, b, c, d, e, g, h, j, k, m, n, p karakterišu emocionalne stilove odgovarajućih članova uže porodice, , $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ predstavljaju konstante privlačnosti, dok funkcije B, B_1, F, M predstavljaju ljubav koju dete oseća prema ocu i majci, kao i ljubav oca i majke prema ostalim članovima porodice (redom).

Uža porodica

- Nakon postavljanja početnih uslova i adekvatno izabranih parametara, dobija se sledeća situacija



Slika 7: Tok emocija $B(t), F(t), M(t), B_1(t)$

Uticaj roditelja na romantičnu vezu

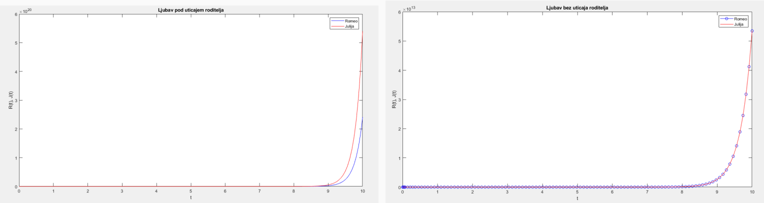
Uticaj roditelja na romantičnu vezu

- Model sada ima sledeći oblik:

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ + F_R + M_R,$$
$$\frac{dJ}{dt} = cR + dJ + F_J + M_J,$$
$$\frac{dF_R}{dt} = eR,$$
$$\frac{dM_R}{dt} = fR,$$
$$\frac{dF_J}{dt} = gJ,$$
$$\frac{dM_J}{dt} = hJ,$$

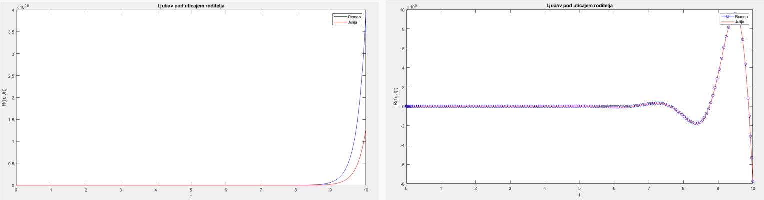
  pri čemu R, J, F_R, M_R, F_J, M_J predstavljaju odgovarajuće funkcije, a a, b, c, d, e, f, g, h odgovarajuće parametre.

Uticaj roditelja na romantičnu vezu



Slika 8: Na levom grafiku je predstavljena situacija u kojoj su Romeovi roditelji protivnici veze, a na desnoj situacija u kojoj se roditelji ne protive vezi

Uticaj roditelja na romantičnu vezu



Slika 9: Na levom grafiku je predstavljena situacija u kojoj su Julijini roditelji protivnici veze, a na desnoj situacija u kojoj se roditelji obe osobe protive vezi

Ljubavni trougao

Ljubavni trougao

- Ova tema često privlači pažnju jer donosi složene emocionalne dinamike i dramatične situacije.
- Različite su vrste ljubavnih trouglova.
- U radu je razmatrana situacija u kojoj samo jedna osoba ima dva ljubavnika i ta osoba se naziva **centralna**.

Ljubavni trougao

- Ukoliko osoba 1 koja ima dva ljubavnika i ni na koji način nije ugrožena njihovim postojanjem, model ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_{12} = f_{12}(x_{12}, x_{21}),$$

$$\dot{x}_{21} = f_{21}(x_{21}, x_{12}),$$

$$\dot{x}_{13} = f_{13}(x_{13}, x_{31}),$$

$$\dot{x}_{31} = f_{31}(x_{31}, x_{13}).$$

- Ljubavnici mogu, a i ne moraju biti svesni uzajamnog postojanja.
- U ovakvim vezama često se javljaju ljubomora i sukob.

Ljubavni trougao

- Nepredvidivost je svojstvo prisutno u haotičnim sistemima.
- Da bi se pokazalo da je sistem nepredvidiv, treba pokazati da je haotičan.

Ljapunovljev eksponent

Ljapunovljev eksponent pruža meru brzine divergencije ili konvergencije susednih putanja u faznom prostoru haotičnog sistema. On može biti pozitivan, negativan i jednak nuli.
Pozitivan Ljapunovljev eksponent ukazuje na eksponencijalnu divergenciju susednih putanja, što znači da je sistem osetljiv na početne uslove i da će male promene u početnim uslovima rezultirati značajnim promenama u budućem ponašanju sistema

Ljubavni trougao

- Jules et Jim - Henri-Pierre Roché, 1953.
- Hipoteza o slobodnoj ljubavi.
- Ako se sa x_1 označi intenzitet Kejtinih osećanja, a sa x_2 Džulsovih, model između Kejt i Džulsa bio bi sledeći (pod hipotezom o slobodnoj ljubavi):

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + R^L(x_2) + (1 + S(x_1))\gamma_1 A_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 + (1 - P(x_2))\gamma_2 A_1,$$

  pri čemu, pored standardnih oznaka, P predstavlja platonizam, a S subjektivnost.

Ljubavni trougao

- Sada, ako se sa x_3 označi intenzitet Džimovih osećanja, model između Kejt i Džima bio bi sledeći:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_3 + (1 + S(x_1))\gamma_1 A_3,$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha_3 x_3 + R^L(x_1) + \gamma_3 A_1,$$

pri čemu važe standardne oznake.

Ljubavni trougao

- Model u kom su dozvoljene slabe smetnje između dva prvobitna para koja bi postojala ako bi važila ideja o slobodnoj ljubavi ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_{12} = -\alpha_1 e^{\epsilon(x_{13}-x_{12})} x_{12} + R_{12}^L(x_{21}) + (1 + S(x_{12}))\gamma_1 A_2,$$

$$\dot{x}_{13} = -\alpha_1 e^{\epsilon(x_{12}-x_{13})} x_{13} + \beta_{13} x_{31} + (1 + S(x_{13}))\gamma_1 A_3,$$

$$\dot{x}_{21} = -\alpha_2 x_{21} + \beta_2 x_{12} e^{\delta(x_{13}-x_{12})} + (1 - P(x_{21}))\gamma_2 A_1,$$

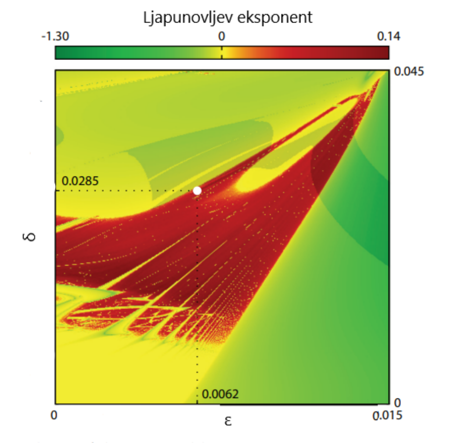
$$\dot{x}_{31} = -\alpha_3 x_{31} + R_{31}^L(x_{13}) e^{\delta(x_{13}-x_{12})} + \gamma_3 A_1,$$

  pri čemu parametri ϵ i δ služe kao oslabljenja hipoteze o slobodnoj ljubavi.
- Pomoću ova dva parametra se podešava u kojoj meri model odstupa od modela slobodne ljubavi.

Ljubavni trougao

- Može se očekivati da ovakav model može dovesti do nepredvidivosti.
- Svi parametri osim ϵ i δ biće fiksirani.
- Gledaće se svi parovi parametara (ϵ, δ) tako što će se napraviti gusta mreža u (ϵ, δ) ravni i simulirati model za svaku tačku te ravni (za svaki par (ϵ, δ)), uvek krećući od istog početnog uslova $(x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{31}) = (0, 0, 0, 0)$.

Ljubavni trougao



Slika 10: Ponašanje K-Dž-Dž modela u zavisnosti od parametara ϵ i δ. Najveći Ljapunovljev eksponent je pozitivan (crvene boje) za haotične atraktore, nula (žut) za kvazi-periodične atraktore i bifurkacione cikluse, dok je negativan (zelen) za stabilne cikluse.

Ljubavni trougao

- Za vrednosti ϵ i δ koji odgovaraju beloj tački, najveći Ljapunovljev eksponent haotičnog atraktora je $L = 0.07 god^{-1}$, tako da je vreme potrebno za divergenciju bliskih trajektorija oko 15 godina.
- Nepredvidivost je definitivno prisutna u ljubavnoj priči između Kejt, Džulsa i Džima.

Kraj

HVALA NA PAŽNJI!